ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

1. Вектор $\vec{a}$ в декартовой системе координат (ДСК) xOy:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$; определение и выражение в декартовой системе координат xOy:

$$\vec{a}\vec{b} = ab\cos\alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

3. Модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\ \sin(\vec{a},\vec{b}).$$

4. Векторное произведение в декартовой системе координат:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x).$$

5. Квадрат векторного произведения:

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2} - (\vec{a}\,\vec{b})^2.$$

6. Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a}\,(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

7. Свойства смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a}\,(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\,(\vec{a}\times\vec{b}), \qquad \vec{a}\,(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{a}\,(\vec{c}\times\vec{b}) = -\vec{b}\,(\vec{a}\times\vec{c}).$$

8. Двойное векторное произведение:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b}).$$

9. Производная по направлению

$$\varphi'_s = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{\partial\varphi}{\partial s}.$$

10. Градиент скалярного поля φ — это вектор $\operatorname{grad}\varphi$, направленный по нормали $\vec{n}$ в сторону возрастания φ, модуль которого равен производной поля φ по направлению нормали $\vec{n}$:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}, \quad |\vec{n}| = n = 1$$

11. Градиент скалярного поля φ в декартовой системе координат:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = \bigtriangledown\varphi.$$

12. Модуль градиента скалярного поля φ в декартовой системе координат:

$$|\operatorname{grad}\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

13. Поток $d\Phi$ вектора $\vec{a}$ через малую площадку $d\vec{S} = \vec{n}\,dS$ есть скалярное произведение $d\Phi = \vec{a}\,d\vec{S}$. Поток вектора $\vec{a}$ через поверхность S равен:

$$\Phi = \int\limits_S \vec{a}\,d\vec{S}.$$

14. Поток вектора $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V:

$$\Phi = \oint\limits_{S(V)} \vec{a}\,d\vec{S}.$$

15. Дивергенции векторного поля $\vec{a}$ в точке A равна производной потока вектора $\vec{a}$ через окружающую точку A поверхность S по заключенному в ней объему V:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{d\Phi}{dV}.$$

16. Дивергенция векторного поля $\vec{a}$ в декартовой системе координат:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \bigtriangledown\vec{a}.$$

17. Теорема Гаусса: поток вектора $\vec{a}$ через произвольную замкнутую поверхность S равен интегралу от дивергенции этого вектора по объему V, ограниченному поверхностью S:

$$\Phi = \oint\limits_{S(V)} \vec{a}\,d\vec{S} = \int\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\,dV.$$

18. Циркуляция вектора $\vec{a}$ вдоль элемента $\vec{dl}$ кривой L: $d\Gamma = \vec{a}\,\vec{dl}$. Циркуляция вектора $\vec{a}$ вдоль произвольной и замкнутой кривых L равны криволинейным интегралам:

$$\Gamma = \int\limits_L \vec{a}\,\vec{dl} \quad \text{и} \quad \Gamma = \oint\limits_L \vec{a}\,\vec{dl}.$$

19. Проекция ротора векторного поля $\vec{a}$ на нормаль $\vec{n}$ к произвольной плоскости равна пределу отношения циркуляции вектора $\vec{a}$ по контуру, лежащему в этой плоскости, к площади, ограниченной контуром, когла эта площадь стремится к нулю:

$$\operatorname{rot}_n \vec{a} = \lim_{x\to 0} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta S} = \frac{d\Gamma}{dS}.$$

20. Ротор векторного поля $\vec{a}$ в декартовой системе координат:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \bigtriangledown \times \vec{a}. \tag{1}$$

21. Теорема Стокса: циркуляция вектора $\vec{a}$ по произвольной замкнутой кривой L равна потоку ротора этого вектора через поверхность S, опирающуюся на кривую L:

$$\Gamma = \oint\limits_{L(S)} \vec{a}\,\vec{dl} = \int\limits_S \operatorname{rot}\vec{a}\,d\vec{S}.$$

Если поверхность S замкнута, то контур L стягивается в точку и циркуляция равна нулю: $\Gamma = 0$.

22. Оператор Гамильтона — это вектор:

$$\bigtriangledown = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

23. Оператор Лапласа — это скаляр:

$$\Delta = \bigtriangledown^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

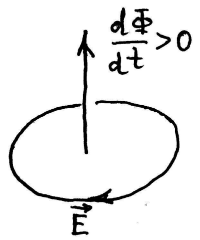
ОСТАВИТЬ ЛИСТ ДЛЯ ЗАПИСИ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И ФОРМУЛ!

Глава 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Явление электромагнитной индукции открыл великий английский физик–экспериментатор М. Фарадей в 1831 году после десяти лет безуспешных попыток превратить магнетизм в электричество.

1.1. Закон электромагнитной индукции

1. Связь электрического и магнитного полей. При изменении магнитного потока, пронизывающего замкнутый проводящий контур, в контуре возникает индукционный ток. Это явление называется *электромагнитной индукцией* (ЭМИ). Индукционный ток по правилу Ленца имеет такое направление, при котором он своим магнитным полем противодействует вызвавшей его причине.



Появление индукционного тока свидетельствует о том, что при изменении магнитного потока в контуре возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$.

Закон электромагнитной индукции. ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$, возникающая в замкнутом проводящем контуре L, равна взятой с противоположным знаком скорости изменения магнитного потока Φ через площадку S, охватываемую этим контуром:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int\limits_{S(L)} \vec{B}d\vec{S}.$$

Эту *интегральную форму* записи называют *законом Фарадея*.

Направление нормали $\vec{n}$ к поверхности S и положительное направление обхода контура L связаны *правилом правого винта*.

2. Первое уравнение Максвелла. Циркуляция напряженности электрического поля $\vec{E}$ по замкнутому контуру L, охватывающему переменный магнитный поток Φ, очевидно равна ЭДС, которая появляется в контуре:

$$\mathcal{E}_i = \oint\limits_L \vec{E}d\vec{l}.$$

Согласно теореме Стокса

$$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = \int\limits_{S(L)} \operatorname{rot} \vec{E}d\vec{S}.$$

Отсюда

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}\int\limits_{S(L)} \vec{B}d\vec{S} = \int\limits_{S(L)} \operatorname{rot} \vec{E}d\vec{S}.$$

Учитывая, что $\vec{B}$ может быть функцией не только времени, имеем

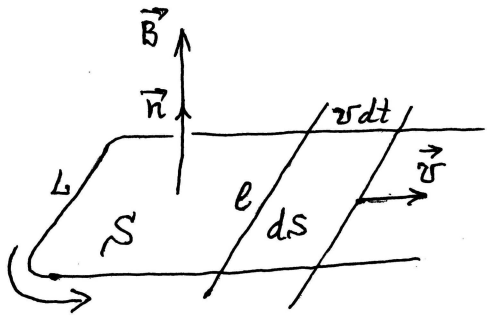
$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Получили *дифференциальную форму* записи закона Фарадея, которая называется *первым уравнением Максвелла.* Оно показывает, что изменение магнитного поля во времени приводит к возникновению в пространстве вихревого электрического поля.

3. Сила Лоренца. На заряд q, движущийся со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле $\vec{B}$, действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}),$$

направление которой для положительного заряда определяется *правилом правого винта.*



Пусть контур образован замкнутой двухпроводной линией и расположенной перпендикулярно линии перемычкой. Если контур находится в однородном магнитном поле индукцией $\vec{B}$, а перемычка движется вдоль линии со скоростью $\vec{v}$, то на находящиеся в ней электроны действует сила

$\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$, где $-e$ — заряд электрона. Это эквивалентно действию электрического поля $\vec{E} = \vec{F}/(-e) = \vec{v} \times \vec{B}$, которое не является электростатическим. Циркуляция вектора $\vec{E}$ по контуру L равна

$$\mathcal{E}_i = \oint\limits_L \vec{E} d\vec{l} = \oint\limits_L (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} = (\vec{v} \times \vec{B})\vec{l},$$

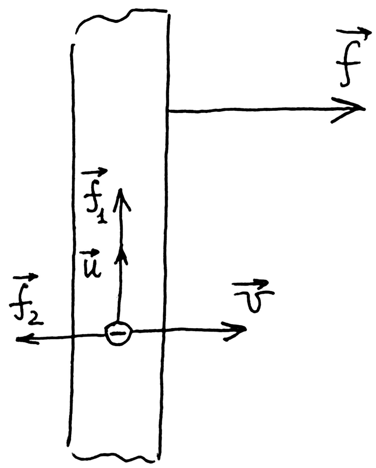
так как вектор $\vec{E}$ отличен от нуля лишь на участке перемычки. Согласно свойству смешанного произведения векторов имеем:

$$\mathcal{E}_i = (\vec{v} \times \vec{B})\vec{l} = \vec{B}(\vec{l} \times \vec{v}) = \frac{\vec{B}(\vec{l} \times \vec{v})dt}{dt}.$$

Учитывая, что $X\vec{l} \times \vec{v})dt = -\vec{n}dS = d\vec{S}$ и $\vec{B}d\vec{S} = d\Phi$, получаем закон Фарадея электромагнитной индукции:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\vec{B}d\vec{S}}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

4. Парадокс. ЭДС индукции возникает в результате работы сторонней силы, которой является сила Лоренца. Но сила Лоренца перпендикулярна движению электронов, поэтому работы не совершает!



Противоречие решается так. К перемычке приложена сила $\vec{f}$, сообщающая ей скорость $\vec{v}$. С такой же скоростью движутся электроны, поэтому на них действует сила Лоренца $\vec{f}_1 = -e(\vec{v} \times \vec{B})$, направленная вдоль перемычки. Эта сила сообщает электронам скорость $\vec{u}$, параллельную перемычке.

На составляющую $\vec{u}$ полной скорости электронов $\vec{v}+\vec{u}$ действует сила Лоренца $\vec{f_2} = -e(\vec{u} \times \vec{B})$, направленная противоположно скорости $\vec{v}$. Поэтому полная сила Лоренца равна $\vec{f_1} + \vec{f_2}$, а ее работа над электронами за время dt:

$$dA = \vec{f_1}\vec{u}dt + \vec{f_2}\vec{v}dt = (f_1 u - f_2 v)dt = e(vu - uv)Bdt = 0.$$

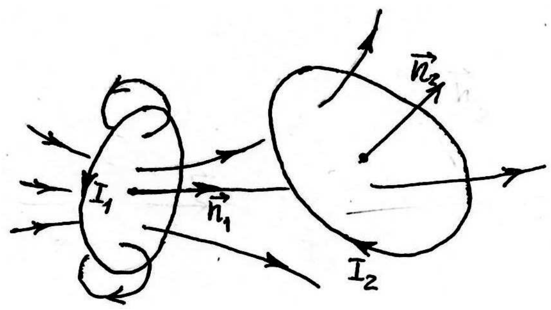
ЭДС создается работой силы $\vec{f_1}$, которая составляет часть полной силы Лоренца. Сила $\vec{f_2}$ направлена противоположно внешней силе $\vec{f}$ и равна ей по модулю, если скорость движения перемычки $\vec{v}$ постоянна.

1.2. Коэффициенты взаимной индукции и самоиндукции

1. Взаимная индукция. Проходящий по контуру 1 ток I_1 создает в неподвижном относительно него контуре 2 магнитный поток Φ_2, пропорциональный току I_1:

$$\Phi_2 = L_{21} I_1,$$

где L_{21} — коэффициент пропорциональности.



Если в контуре 2 идет ток I_2, то он в контуре 1 создает магнитный поток

$$\Phi_1 = L_{12} I_2,$$

Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называют *коэффициентами взаимной индукции или взаимной индуктивностью.*

При отсутствии ферромагнетиков коэффициенты взаимной индукции L_{12} и L_{21} равны (*теорема взаимности*):

$$L_{12} = L_{21}.$$

Следовательно, в этом случае можно не делать различия между L_{12} и L_{21} и просто говорить о взаимной индуктивности двух контуров.

Взаимная индуктивность двух контуров численно равна магнитному потоку сквозь один из контуров, создаваемому единичным током в другом контуре. Взаимная индуктивность L_{12} зависит от формы, размеров, взаимного расположения контуров, магнитной проницаемости среды, окружающей контуры и является алгебраической величиной.

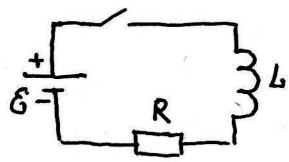
2. Самоиндукция. Уединенный контур с током Iсоздает магнитный поток в собственном контуре:

$$\Phi = LI,$$

где L — *коэффициент самоиндукции* или *индуктивность*.

1.3. Энергия магнитного поля

1. Магнитная энергия тока. Соединим последовательно источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$, ключ, катушку индуктивностью L и резистор сопротивлением R.



При замыкании ключа по цепи пойдет ток, что приведет к появлению ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{si}$. Согласно закону Ома

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_{si}, \qquad \text{или} \qquad \mathcal{E} = IR - \mathcal{E}_{si}.$$

За время dt сторонние силы источника совершают работу

$$\delta A = \mathcal{E} I dt = I^2 R dt - \mathcal{E}_{si} I dt.$$

Так как $I^2Rdt = \delta Q$ — количество теплоты, выделившееся в цепи за время dt, и ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{si} = -d\Phi/dt$, получаем

$$\delta A = \delta Q + I d\Phi.$$

Работа, совершаемая против ЭДС самоиндукции равна $\delta A = I d\Phi$. Если ферромагнетики отсутствуют, то $d\Phi = LdI$, тогда $\delta A = LIdI$. Проинтегрировав, имеем

$$A = \int_0^A \delta A = \int_0^I LIdI = \frac{LI^2}{2}.$$

Из формулы для δA следует, что часть работы сторонних сил идет на изменение внутренней энергии проводников в цепи, а часть — на возникновение магнитного поля, энергия которого

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Эта энергия называется *магнитной энергией тока* или *собственной энергией тока*.

2. Энергия взаимодействия токов. Рассмотрим два неподвижных контура 1 и 2, расположенные близко друг к другу. Включим одновременно источники токов, тогда в контурах возникнут токи I_1, I_2 и появятся ЭДС индукции $\mathcal{E}_{i1}$, $\mathcal{E}_{i2}$ и самоиндукции $\mathcal{E}_{si1}$, $\mathcal{E}_{si2}$.

Магнитная энергия такой системы будет равна работе источников против $\mathcal{E}_i$ и $\mathcal{E}_{si}$ за время dt:

$$dW = \delta A = -(\mathcal{E}_{si1} + \mathcal{E}_{i1})I_1 dt - (\mathcal{E}_{si2} + \mathcal{E}_{i2})I_2 dt.$$

Так как

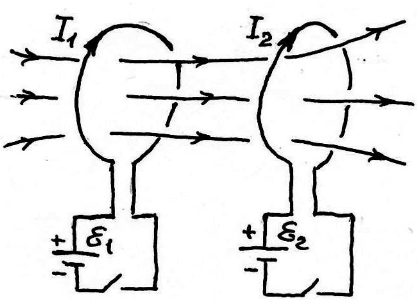
$$\mathcal{E}_{si1} = -L_1\frac{dI_1}{dt}, \quad \mathcal{E}_{si2} = -L_2\frac{dI_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_{i1} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_{i2} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt},$$

то

$$dW = L_1 I_1 dI_1 + L_{12} I_1 dI_2 + L_2 I_2 dI_2 + L_{21} I_2 dI_1.$$

Учитывая, что $L_{12} = L_{21}$, имеем:

$$dW = d\left(\frac{L_1 I_1^2}{2}\right) + d\left(\frac{L_2 I_2^2}{2}\right) + d(L_{12} I_1 I_2),$$



откуда

$$W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + L_{12} I_1 I_2.$$

Первые два слагаемых в этом выражении являются собственными энергиями токов I_1 и I_2, поэтому что последнее слагаемое — это *взаимная энергия токов* или *энергия их взаимодействия:*

$$W_{12} = L_{12} I_1 I_2.$$

В отличие от собственных энергий, это величина алгебраическая; ее знак зависит от направления токов I_1 и I_2.

3. Энергия магнитного поля. Для энергии W магнитного поля, заполняющего объем V, справедлива формула

$$W = \int\limits_V \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} dV.$$

Так как $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, то

$$W = \int\limits_V \frac{B^2}{2\mu\mu_0} dV.$$

Объемная плотность магнитной энергии $w = dW/dV$ равна:

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}.$$